

模稜函數法應用於衛星高程測量  
APPLICATION OF AMBIGUITY FUNCTION  
METHOD TO SATELLITE LEVELING

游豐吉，翁坤詩  
Fong-Gee Yiu and Kune-Shy Ueng

原著載於第十三屆測量學術及應用研討會論文集，  
1994年9月，155-164頁

*Reprinted from  
Proceedings of 13th Conference on  
Current Researches and Application in Surveying  
September 1994,  
pp. 155-164*

# 模稜函數法應用於衛星高程測量

## Application of Ambiguity Function Method to Satellite Leveling

游 豐 吉\*      翁 坤 詩\*\*  
Fong-Gee Yiu   Kune-Shi Ueng

### 摘要

模稜函數法為利用相位餘弦化進行累加約制的求解方法。在較短基線二次差分模稜函數法求解可視為大氣效應完全消除。但隨著基線拉長，大氣效應則必須加以考慮。本文以九公里等級基線進行模稜函數法探討，以自行設計之程式集(MANGO)求解，其在平面及基線求解之重覆性為0.3 cm，高程向為0.9 cm。最後以5km×4km之實驗區進行衛星測量高程求解，並經基準轉換成正高和NA-3000水準儀實測高程進行比較，其均方根誤差為0.6cm。

### Abstract

Setting phase observables in cosines, Ambiguity Function Method (AFM) finds out its solution by accumulating the phase data. In the case of a short baseline, we can eliminate in AFM atmospheric effects when using double-difference carrier phases AFM. But the longer a baseline reaches, the more significant the atmospheric effects become. In this paper, we use AFM to determine a baseline of about 9 km by our program named MANGO. The repeatabilities in horizontal and baseline length are about 0.3 cm, and in geometric height 0.9 cm. Finally, we do a satellite leveling in an experiment area about 5km x 4km. After datum transformation, we compare the orthometric heights with the leveled heights by NA-3000. A root mean square error of 0.6 cm results.

關鍵詞：模稜函數法(Ambiguity Function Method)、相位餘弦化(Phases in cosines)

---

\*：國立中央大學土木工程研究所博士班學生

\*\*：亞新工程顧問股份有限公司工程師

## 一・前言

GPS資料之求解多以最小二乘法進行最佳參數的求定，就相位資料求解而言所求解的變數中除了測站位置外，另一個重點就是週波模稜(Cycle Ambiguity)的求定，在求解過程中週波模稜求定正確與否對求解成功而言，扮演一個很重要的角色。模稜函數法(Ambiguity Function Method)是另一種求解方法，不同於最小二乘法的，它將相位觀測方程式經餘弦化處理後消去週波模稜，省去直接求解週波模稜的困擾。而就其求解過程而言，此法不是進行最佳化參數求解，而是利用一連串的累加約制，並輔以試誤法之求解方法[1-3]。

在本文中，將介紹較完整模式化的模稜函數法求解，並以此法進行基線求解評估及將此法用於快速靜態定位求解。

## 二・理論基礎

### § 2-1 模稜函數法

GPS相位觀測方程式經二次差分後可表示成如下：

$$\varphi = \frac{f}{c}(R + d_{trop} - d_{ion}) - N \quad (2.1)$$

將(2.1)式左右兩邊同乘以 $2\pi$ 並移項，經餘弦化後可得：

$$\begin{aligned} & \cos\left(2\pi\varphi - \frac{2\pi f}{c}(R + d_{trop} - d_{ion})\right) \\ & = \cos(-2\pi N) = 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

根據(2.2)式我們可以進行時刻、二次差分數目及波段間的累加約制，可得如下：

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{s=1}^{sn-1} \sum_{l=1}^2 \cos\left(2\pi\varphi - \frac{2\pi f}{c}(R + d_{trop} - d_{ion})\right) \\ & = 2 \cdot n_t \cdot sn \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.3)式中其參數定義分別如下：

$n_t$  : epoch數目

$sn$  : 衛星顆數

$\varphi$  : 二次差分相位觀量

$f$  : 頻率

$c$  :光速

$R$  :衛星至接收器距離

$d_{trop}$  :對流層影響量

$d_{ion}$  :電離層影響量，其與頻率有關

將(2.3)式歸一化後可得模稜函數法求解之基本式子:

$$\frac{\sum_{n=1}^{n_t} \sum_{s=1}^{sn-1} \sum_{l=1}^2 \cos\left(2\pi\varphi - \frac{2\pi f_l}{c}(R+d_{trop}-d_{ion})\right)}{2 \cdot n_t \cdot (sn-1)} = 1 \quad (2.4)$$

在(2.4)式左，稱之為AF(Ambiguity Function)，而參數的定義已如前述，所求之未知為隱含於衛星到接收器間距離 $R$ 內之待測站位置。若能找到真正的位置代入(2.4)式，則其值最接近1，模稜函數法即根據此法求解。

## § 2-2 電離層影響量

於(2.4)式中之大氣效應，若於短基線時可視為因二次差分消盡其效應而予以忽略，但在實際狀況，特別是基線一拉長時則必需加以考慮。有關對流層效應方面我們可利用模式來給定之(如Hopfield, Black model)。而在電離層效應部份則可利用L1及L2雙頻之特性來求取，依L1及L2相位觀測方程式我們可將之線性組合而得其電離層影響量，如下:

L1之影響量為:

$$d_{ion;L1} = \frac{\kappa}{f_1^2} = \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \left[ \frac{c}{f_1} \cdot (\varphi_1 + N_1) - \frac{c}{f_2} \cdot (\varphi_2 + N_2) \right] \quad (2.5)$$

L2之影響量為:

$$d_{ion;L2} = \frac{\kappa}{f_2^2} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \left[ \frac{c}{f_1} \cdot (\varphi_1 + N_1) - \frac{c}{f_2} \cdot (\varphi_2 + N_2) \right] \quad (2.6)$$

由(2.5), (2.6)式可知:當我們若能求定L1及L2之週波模稜 $N_1, N_2$ ，則我們可以求得電離層影響量，本文中電離層效應及以此法得之。

## § 2-3 求解步驟

模稜函數法之求解與最小二乘法不同，它是由一初始近似值去進行試誤法搜尋，其步驟如下:

### 1. 初始值給定:

先求定於真解附近之初始近似值，在本文中是以三次差分進行初始值求定，可將其初始位置求定在距真解位置附近五十公分以內。

### 2. 於初始值附近進行空間搜尋:

以初始值為中心於空間中開一立方體，並將此立方體細分為較小的網格點，而所謂的空間搜尋乃是把所有網格點之位置代入(2.4)式，找尋AF值最大的位置。值的一提的是在此步驟因週波模稜未知，故無法知電離層效應，故在代入(2.4)式中時暫先忽略，此時尚為求解之初始步驟。

在本文中所取之立方體為以初始值為中心開一1公尺為邊長的立方體，網格點間隔為4公分，而對流層影響量則以Black模式估算之。為了使求解不失客觀，我們取AF值最大的前n組(本文中取10組)，做為求解的初始位置，以節省求解時間。

### 3. 電離層影響量求定:

由第2步驟求得之位置，我們可代入二次差最小二乘求解求出相應的一組L1及L2週波模稜，將此組代入(2.5), (2.6)式可得電離層影響量。

### 4. 模式化後的模稜函數法求解:

以步驟1所求之n個位置為初始值，於空間中再切一個小立方體，將立方體細分為若干網格(本文中小立方體為24公分的立方體，網格點單位大小則為1公分)，並將對流層、電離層效應加入代入(2.4)式，重覆第2步驟進行求解。找出n個小立方體中之AF值最大者即為其解。

## 三· 實驗與結果

利用此法，於本文中設計了兩實驗求解，分別如下:

- 一. 基線重覆性測試: 利用此法，對一約9公里等級的基線進行觀測，並分析其於基線及座標三分量間的變化。
- 二. 衛星高程測量: 針對一實驗區進行衛星測量並平行進行傳統水準測量，評估其於高程測量之精度。

## § 3-1 實驗相關資料

### 一. 基線重覆性測試:

觀測基線:由中央大學科一館頂樓之衛星主點SPP3至其南方之三等三角點大金山  
(DG3)

觀測時間:1994年1月5日

儀器:WILD GPS System 200/LEICA 接收器

取樣間隔:10秒

最低仰角:15度

使用時間:100分鐘

定位方法:靜態定位

### 二. 衛星高程測量:

觀測區:高雄縣永安鄉鹽田村約5kmx4km之區域(圖2)

觀測時間:1992年9月2日至9月3日

儀器:WILD GPS System 200/LEICA 接收器

取樣間隔:15秒

最低仰角:15度

使用時間:5分鐘

定位方法:快速靜態定位

## 3-2 資料分析與結果

### 一. 基線重覆性測試:

分析方法:

以每10分鐘為一時段,共有十筆資料段進行模稜函數法求解,並選擇GDOP值較小時段,觀察其基線及座標三分量(經、緯度及幾何高)的變化。

結果:

由圖1可見:在圖中橫軸為觀測間資料點,縱軸則為基線及三維座標變化,其座標因繪圖關係在經緯度向皆已減掉一常差值,分別為經度減去121度10分17秒,緯度減去24度53分19秒。

由圖可知以此法求解每十分鐘為一筆之基線，在約9公里等級之基線求解其平面、基線的變化標準差為0.3公分，高程變化較大為0.9公分，顯示其變化差異性在1公分內。

## 二. 衛星高程測量:

本實驗資料求解以本單位GPS實驗室自行開發之程式集MANGO (MANagement of GPS data for Orientation)中有關模稜函數法部份程式進行求解，其分析方法如下:

1. 以五分鐘資料進行模稜函數法求解，求出每點之經緯度及幾何高。
2. 以YK8, AN3, S55, HT1四點為高程控制點，以線性預估內差法(4)進行座標轉換，將幾何高換為正高。
3. 將所轉換之正高與WILD NA-300所測得之正高進行比較。

結果:

所得結果列於表一，如表一之成果可得知，以模稜函數法進行快速靜態定位高程求解，在此小區域實驗區內其精度可達1公分以內。

## 四 · 結論與建議

1. 由圖1可知以模稜函數法求解在約9公里等級基線，以每十分鐘一筆進行重覆性測試，其基線及座標分量變異程度在1公分以內。
2. 以模稜函數法求解快速靜態定位高程測量，在小區域其精度可達1公分以內。
3. 模稜函數法是利用累加約制依AF值來求解，與最小二乘法不同。求解時的相關步驟須加以注意，而就大氣效應的加入此法與否，可視其基線長短而定，在約9公里等級基線其加入已有必要。

## 五 · 誌謝

本文得以順利完成主要得助於國家科學委員會專題研究計畫NSC83-0410-E008-07經費贊助，另外對行政院公共工程督導會報所提供之資料一併表達感謝之意。

## 六 · 參考文獻

1. 游豐吉,『模稜函數法應用於GPS之相對定位』,碩士論文,國立中央大學太空科學研究所,中壢(1993)。

2. Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger, and J. Collins, "Global Positioning System Theory and Practice", Springer-Verlag, Wien(1992).
3. Mader, G.L., "Rapid Static and Kinematic Global Positioning System Solution Using the Ambiguity Function Technique", Journal of Geophysical Research, Vol. 97, No. B3, pp.3271-3283. MARCH 10 (1992).
4. "User Manual, SKI - Static Kinematic Software", Leica AG, Heerburgg, Chap. 13 (1992).

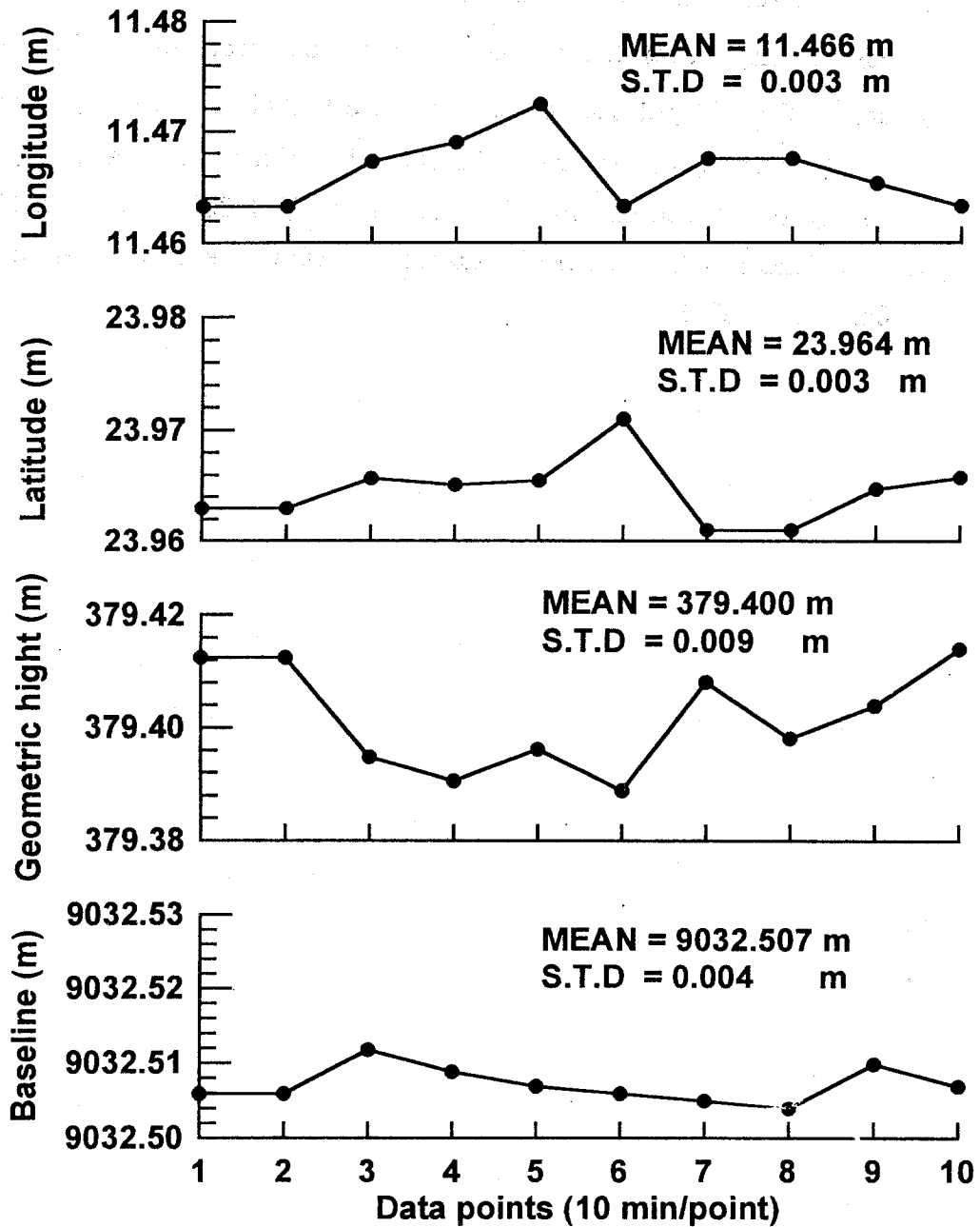


圖1. SPP3-DG3之基線長度及座標分量變化程度圖(每10分鐘1筆，精度到公分)



表一 模稜函數法求解衛星高程測量結果表(求解使用時間5分鐘)

高程控制 點(*)者 及沉陷點 編號	1992年九月2日至九月3日 GPS衛星高程測量						數位水準 儀 WILD NA3000 之測高 H' (m)
	離參考站 YK8基線 長等級 (m)	MANGO求解		SKI求解		幾何架構 指 標 GDOP	
		H (m)	H' - H (m)	H (m)	H' - H (m)		
YK8 *	-	3.935	0.002	3.940	-0.003	2	3.937
HT1 *	2788.1	2.094	-0.001	2.905	0.000	2	2.095
S55 *	2875.5	2.062	-0.001	2.061	0.000	3	2.061
AN3 *	654.8	4.079	0.008	4.074	0.013	2	4.087
AN2	389.0	6.412	0.008	6.417	0.003	2	6.420
AN4	588.7	4.766	0.011	4.776	0.001	2	4.777
AN5	410.6	6.035	0.005	6.037	0.003	2	6.040
AN6	31.9	3.651	0.008	3.658	0.001	2	3.659
SP3	455.2	3.864	-0.007	3.865	-0.008	3	3.857
SP4	344.7	3.748	-0.002	3.748	-0.002	3	3.746
SP6	188.4	3.967	0.014	3.978	0.003	3	3.981
SP7	764.9	4.521	0.005	4.529	-0.003	4	4.526
SP8	2662.5	2.834	0.000	2.819	0.013	2	2.832
SP9	2239.0	1.274	0.005	1.280	-0.001	3	1.279
SP10	792.7	1.643	-0.007	1.659	-0.022	3	1.637
S38	3362.6	4.102	0.008	4.126	-0.016	3	4.110
S43	1743.8	1.449	0.003	1.455	-0.003	3	1.452
S53	1521.7	1.569	0.005	1.583	-0.009	3	1.574
平均值		0.003		-0.002			
均方根誤差		0.006		0.009			